Capítulo 1

Funções, Plano Cartesiano e Gráfico de Função

Ao iniciar o estudo de qualquer tipo de matemática não podemos provar tudo. Cada vez que introduzimos um novo conceito precisamos defini-lo em termos de conceitos cujos significados já são por nós conhecidos sendo quase impossível estar retornando sempre a definição de todos os conceitos anteriores. Então, precisamos escolher o nosso ponto de partida, isto é, o que vamos admitir já sabido e o que vamos explicar e provar em termos do que já foi suposto conhecido. Em nosso estudo admitiremos o conhecimento dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, da adição, da subtração, multiplicação e a divisão por número diferente de zero.

Quando comparamos quaisquer dois números reais x e y, temos a chamada "Lei da Tricotomia", ou seja, vale uma e somente uma das seguintes

$$x > y \qquad \text{ou} \qquad x < y \qquad \text{ou} \qquad x = y$$

1.1 Funções

Supomos, neste momento, alguma familiaridade com o conceito de função. Nosso objetivo principal aqui é o de uniformizar a linguagem.

Definição 1: *Dados dois conjuntos, $A, B \neq \emptyset$, uma função de A em B, denotado por $f : A \to B$, ou simplesmente f, é uma lei que associa a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$.*

Exemplo 1:

1. Quando $A = B$, um exemplo simples é $f : A \to A$ tal que $f(x) = x$, para todo $x \in A$. Esta função é chamada identidade.

2. Seja $c \in \mathbb{R}$ um número fixado. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é chamada função constante.

3. Denotaremos sempre com $\mathbb{R}_+$, o conjunto dos números reais não negativos. Defina:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ por $f(x) = x^2$.

(b) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

4. $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 1)}$.

Em uma $f : A \to B$, os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, *domínio* $(D(f))$ e *contra-domínio* $(CD(f))$ de f. Dado um conjunto $D \subset A$, sua *imagem* por f é o conjunto $f(D) \subset B$ definido por

$$f(D) = \{y \in B \mid \ y = f(x), \text{ para algum } x \in A\}$$

Definição 2: *Quando $f(A) = B$, a função f se diz sobrejetora. Quando a elementos distintos de A estão associados elementos distintos de B, isto é,*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \ \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$$

a função f se diz injetora. Quando f for injetora e sobrejetora, também será chamada bijetora.

Exemplo 2:

1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é sobrejetora, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x) = x^2 \geq 0$, ou seja, não existe um número real x tal que $f(x) \in \mathbb{R}_-$. Além disso, tal função também não é injetora, pois para todo $x \neq 0 \in \mathbb{R}$ temos que $-x \neq x$ e que $(-x)^2 = x^2$, ou seja, $f(-x) = f(x)$, contrariando a definição de ser injetora.

2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ é sobrejetora, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 \geq 0$. No entanto, tal função não é injetora, pelo mesmo motivo da item anterior.

3. As funções $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2$ são sobrejetoras e injetoras, ou seja, são bijetoras.

Definição 3: *Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, fica definida a função composta, $g \circ f : A \to C$, por $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$, para todo $x \in A$.*

Note que, de acordo com a definição acima, para que a função composta $g \circ f : A \to C$ seja definida é necessário que $f(A)$ esteja contido no domínio B da função g.

Exemplo 3:

1. Sejam $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$, $g : (0, 1) \to (1, \infty)$, tais que $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Então, $(g \circ f)(x) = 1 + x^2$. Daria para definir $f \circ g$?

2. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ são dadas por $f(x) = x^2 + 2x - 2$ e $g(x) = \sqrt{x + 1}$, então a composição $g \circ f$ não pode ser definida porque $f(\mathbb{R}) = [-3, \infty)$ não está contido no domínio $[-1, \infty)$ de g.

Definição 4: *Dadas duas funções, f e g, com domínios $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = A$, sua soma, $f+g$, seu produto, fg, e o quociente, $\frac{f}{g}$, ficam definidos, respectivamente, por:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

para todo x em A, e

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para todo x em A tal que $g(x) \neq 0$.

Exemplo 4: Assim, se $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = x$, tem-se

$$(f+g)(x) = cos(x) + x$$

$$(fg)(x) = xcos(x)$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{cos(x)}{x}$$

1.1.1 Par Ordenado e Gráfico de uma Função, Plano Cartesianao

Definição 5: *Um par ordenado consiste de dois elementos, digamos a e b, dos quais um, digamos a, é designado como primeiro elemento e o outro como segundo elemento. Um par ordenado é denotado por (a, b). Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$*

Definição 6: *Dados os conjuntos A e B diferentes do vazio, denomina-se produto cartesiano de A por B, e se indica por $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tal que $x \in A$ e $y \in B$, ou melhor,*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \ \ e \ \ y \in B\}$$

Exemplo 5: Se $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$ temos que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ é dado por

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ y \in \mathbb{R}\}$$

Criado por René Descartes, o *Plano Cartesiano* consiste em dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado de *eixo das abscissas* e o vertical de *eixo das ordenadas*. O plano cartesiano foi desenvolvido por Descartes no intuito de localizar pontos num determinado espaço, uma vez que existe uma correspondência bionívoca entre os infinitos pontos de um plano e os infinitos pares ordenados, desta maneira podemos representar estes pontos através de duas retas perpendiculares.

Em outras palavras, denomina-se plano cartesiano o conjunto de todos os pares ordenados de números reais representado pelo conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

No plano cartesiano os pares ordenados (x, y) são referidos como pontos e o elemento x é chamado abscissa e o elemento y ordenada do ponto.

Além disso, o encontro dos eixos, o qual ocorre no ponto $O = (0, 0)$, é chamado de origem e as disposições dos eixos no plano formam quatro quadrantes, mostrados na figura a seguir.

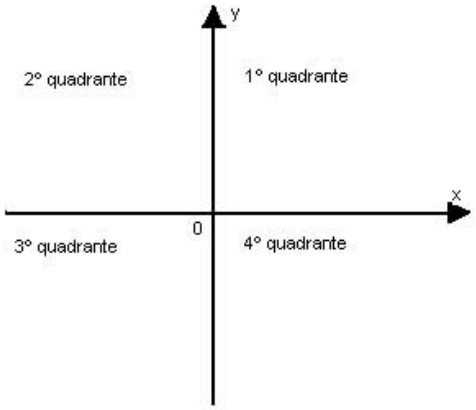


Figura 1.1: Plano Cartesiano

Exemplo 6: Dados os pontos

$$A = (3, 6),\ B = (2, 3),\ C = (-1, 2),\ D = (-5, -3),\ E = (2, -4),\ F = (3, 0) \text{ e } G = (0, 5)$$

represente-os no plano cartesiano.

Para marcar um ponto qualquer (a, b) no plano cartesiano procedemos da seguinte maneira:

1. Localiza-se o ponto a no eixo das abscissas (eixo x);
2. Localiza-se o ponto b no eixo das ordenadas (eixo y);
3. Traçe um reta paralela ao eixo y partindo de a e na direção de b;
4. Traçe um reta paralela ao eixo x partindo de b e na direção de a;
5. O encontro (interseção) de tais retas será o local onde se deve marcar o ponto (a, b).

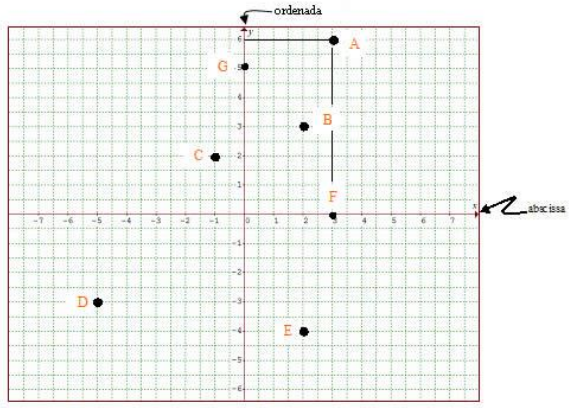


Figura 1.2: Marcando pontos no plano cartesiano

O termo *gráfico* em matemática, geralmente é usado quando queremos descrever uma figura por meio de uma condição que é satisfeita pelos pontos da figura e por nenhum outro ponto.

Uma das representações gráficas mais comuns e importantes em matemática é o gráfico de uma função. O qual é definido como segue.

Definição 7: *O gráfico de uma função* $f : A \to B$, *com* $A, B \subset \mathbb{R}$, *é o conjunto* $G(f)$ *de pares ordenados dado por:*

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}.$$

Na verdade, podemos representar graficamente uma função usando vários tipos de gráficos: *gráficos de barras*, *correspondência* ou *relação entre conjuntos*, *gráfico cartesiano*. Os gráficos cartesianos permitem visualizar "a forma" geométrica de uma função e as suas principais características.

Exemplo 7: Considere as seguintes funções de 1º grau $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = -x + 1$ e esboce seus gráficos.

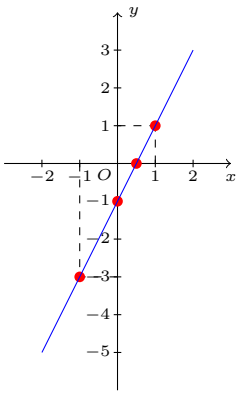
Para construirmos os gráficos de $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = -x + 1$ devemos atribuir valores reais para x, para que possamos achar os valores correspondentes $f(x)$ e $g(x)$, os quais correspondem no gráfico cartesiano, respectivamente, à abcissa x e à ordenada y.

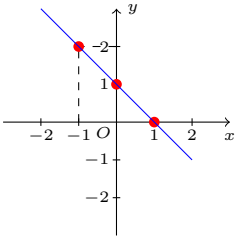
$f(x) = 2x - 1$

x	$y = f(x)$
1	$f(1) = 2.1 - 1 = 1$
$\frac{1}{2}$	$f(1) = 2.\frac{1}{2} - 1 = 0$
0	$f(0) = 2.0 - 1 = -1$
-1	$f(-1) = 2.(-1) - 1 = -3$

$g(x) = -x + 1$

x	y
1	0
0	1
-1	2





Exercícios 1: Determinar o gráfico da função dada por $f(x) = x^2$.

Definição 8: *Definimos como zero ou raiz de uma função $f(x)$ todo valor da variável x que tem por imagem o valor zero. Por outras palavras, zero de uma função $f(x)$ é todo valor de x, pertencente ao domínio dessa função, tal que $f(x) = 0$. Graficamente, o zero de uma função é todo valor das abcissas dos pontos de interseção do gráfico da função com o eixo das abcissas x.*

Exemplo 8:

1. Calcule a raiz da função $f(x) = 2x - 9$, ou seja, encontre o valor de x para o qual o gráfico da função, que é uma reta, intersecta o eixo x.

   Para resolver este problema basta igualar a função $f(x)$ a 0 e isolar a variável x. De fato,

   $$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{2}$$

   Portanto, o zero da função $f(x) = 2x - 9$ é $x = \frac{9}{2}$.

2. Em geral a função que determina uma reta é dada por $f(x) = ax+b$, onde os coeficientes a e b pertencem aos números reais e diferentes de zero. Sendo assim calcule o zero da função $f(x)$.

   Como antes, para resolver este problema basta igualar a função $f(x)$ a 0 e isolar a variável x. Ou seja,

   $$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

   Portanto, o zero da função $f(x) = ax + b$ é $x = -\frac{b}{a}$.

3. Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, e calcule suas raízes.

   Para calcular o(s) zero(s) da função $f(x)$ devemos fazer $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, os zeros ou raízes de $f(x)$ são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

   onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

   Por exemplo, suponhamos que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, ou seja, a equação do segundo grau é dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Sendo assim para calcular as raízes desta função devemos ter $x^2 - 5x + 6 = 0$. Substituindo os valores dos coeficinetes a, b e c na fórmula de Bhaskara obtemos:

   $$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

   ou seja, as raízes são

   $$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$$

Como vimos no exemplo anterior se $f(x) = ax + b$ então o zero desta função é $x = -\dfrac{b}{a}$. Uma pergunta que surge naturalmente aqui é: *O que acontece com o sinal de* $y = f(x)$ *para valores maiores ou menores que* $x = -\dfrac{b}{a}$*?*

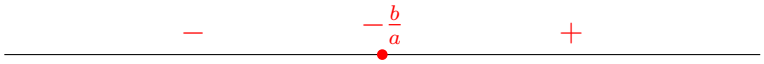
Esta pergunta nos leva a estudar o sinal da função. Em outras palavras, estudar o sinal de uma função, é determinar para quais valores reais de x a função é positiva, negativa ou nula. A melhor maneira de analisar o sinal de uma função é através do gráfico, pois permite-nos uma avaliação mais ampla da situação. Vejamos:

1. Se $a > 0$ então temos que:

   (a) se $x > -\dfrac{b}{a}$ então $f(x) > 0$.

   (b) se $x < -\dfrac{b}{a}$ então $f(x) < 0$.

   Graficamente temos:

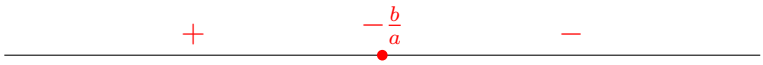


2. Se $a < 0$ então temos que:

   (a) se $x < -\dfrac{b}{a}$ então $f(x) > 0$.

   (b) se $x > -\dfrac{b}{a}$ então $f(x) < 0$.

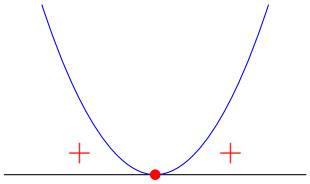
   Graficamente temos:



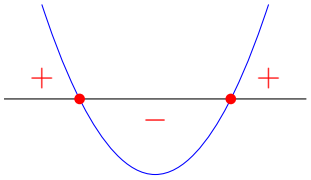
Pergunta similar podemos fazer com relação a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Para construirmos o gráfico de uma função do 2º grau precisamos determinar o número de raízes da função, e se a parábola possui concavidade voltada para cima ou para baixo. Para isto devemos analizar as seguintes possibilidades:

1. Se o coeficiente $a > 0$, então a parábola é de concavidade voltada para cima e tmos que:

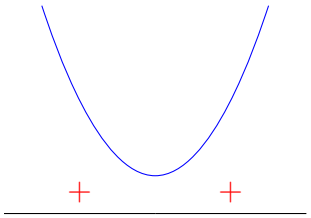
   (a) $\Delta = 0$, a função possui uma raiz real.



(b) $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas

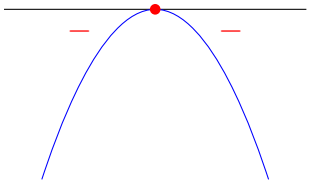


(c) $\Delta < 0$, a função não possui raiz real.

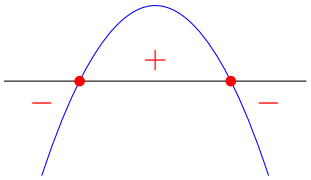


2. Se o coeficiente $a < 0$, então a parábola é de concavidade voltada para baixo e tmos que:

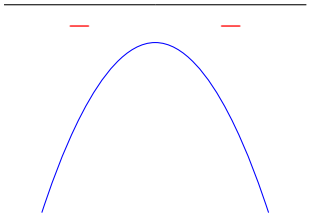
(a) $\Delta = 0$, a função possui uma raiz real.



(b) $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas



(c) $\Delta < 0$, a função não possui raiz real.



Exercícios 2: Encontre as raízes, faça o gráfico e o estudo de sinal das seguintes funções.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
2. $f(x) = x^2 + 8x + 16$
3. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
4. $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$
5. $f(x) = -x^2 + 12x - 36$
6. $f(x) = 2x - 1$
7. $f(x) = -2x - 1$
8. $f(x) = 3x + 9$

Capítulo 2

Inequações

Definição 9: *Expressões algébricas são expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números, são também denominadas expressões literais. As letras constituem a parte variável das expressões, pois elas podem assumir qualquer valor numérico.*

Expressões algébricas são expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números. As letras constituem a parte variável das expressões, pois elas podem assumir qualquer valor numérico. Em outras palavras, as letras são denominadas *incógnita* ou *variável*.

Exemplo 9:

1. $2x - 5$
2. $3a + 2y$
3. $x^2 + 7x$
4. $5 + x - (5x - 2)$
5. $10y - 10x$
6. $a^2 - 2ab + b^2$

Definição 10: *Define-se como sentença aberta aquela sentença simples cujo resultado (falso ou verdadeiro) é desconhecido, por conter um elemento indefinido ou por conter variáveis.*

Exemplo 10:

1. Ele foi o melhor jogador do mundo em 2005.

   Dependendo de quem se esteja falando a frase poderá ser verdadeira ou falsa. Por isso, essa é uma sentença aberta.

2. $\frac{x+y}{5}$ é um número inteiro.

   Esta frase contém variáveis, o que a tornará verdadeira ou falsa dependendo dos valores que forem atribuídos a x e y. Portanto, essa também é uma sentença aberta.

3. João da Silva foi o Secretário da Fazenda do Estado de São Paulo em 2000.

   Essa frase, ao contrário, não é uma sentença aberta, pois não há elementos desconhecidos ou variáveis.

Definição 11: *Inequação é uma sentença aberta expressa por uma desigualdade entre duas expressões algébricas. Em outras palavras, sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções, chamamos de inequação na variável x a qualquer uma das sentenças abertas a seguir:*

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) < g(x)$$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) \leq g(x)$$

Exemplo 11:

1. $2x > 5$ é uma inequação em que $f(x) = 2x$ e $g(x) = 5$.
2. $3x + 1 < -14$ é uma inequação em que $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = -14$.
3. $4x + \frac{x}{2} \geq 0$ é uma inequação em que $f(x) = 4x + \frac{x}{2}$ e $g(x) = 0$.
4. $5x + 7 > 3$ é uma inequação em que $f(x) = 5x + 7$ e $g(x) = 3$.
5. $8 - x < -3x$ é uma inequação em que $f(x) = 8 - x$ e $g(x) = -3x$.
6. $3x + 1 > 2x - 14$ é uma inequação em que $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = 2x - 14$.
7. $2x - 7 \leq -2$ é uma inequação em que $f(x) = 2x - 7$ e $g(x) = -2$.
8. $\frac{5x}{4} + \frac{x}{2} \leq 2x - 1$ é uma inequação em que $f(x) = \frac{5x}{4} + \frac{x}{2}$ e $g(x) = 2x - 1$.

Propriedades 1: As inequações possuem as seguintes propriedades:

a) Uma desigualdade não se altera quando somamos ou subtraímos um mesmo número de ambos os lados da desigualdade.

   Exemplo 12: Considere a desigualdade $3x + 1 > 2x - 14$. Se somarmos 3 a ambos os lados dessa desigualdade teremos:

$$3x + 1 + 3 > 2x - 14 + 3$$

   ou melhor,

$$3x + 4 > 2x - 11$$

b) Uma desigualdade não muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos ambos os lados da desigualdade por um número positivo.

Exemplo 13: Considere a desigualdade $3x+1 > 2x-14$. Se multiplicarmos por 3 ambos os lados dessa desigualdade teremos:

$$3(3x + 1 > 2x - 14)$$

ou melhor,

$$3(3x + 1) > 3(2x14)$$

ou ainda,

$$9x + 3 > 6x - 42$$

c) Uma desigualdade muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos ambos os lados da desigualdade por um número negativo.

Exemplo 14: Considere a desigualdade $3x + 1 > 2x - 14$. Se multiplicarmos por -3 ambos os lados dessa desigualdade teremos:

$$-3(3x + 1 > 2x - 14)$$

ou melhor,

$$-3(3x + 1) < -3(2x - 14)$$

ou ainda,

$$-9x - 3 < -6x + 42$$

Definição 12: *Resolver uma inequação significa apurar um conjunto de todos e quaisquer possíveis valores que possam assumir uma ou mais variável que estejam envolvidas no problema, este conjunto é chamda de* conjunto solução *e denotado por S. Em outras palavras, a solução de uma inequação é encontrada exatamente como se faz com uma equação, a única diferença é que quando multiplicamos ou dividimos por um número negativo a desigaldade muda de sentido. Sendo assim, uma maneira simples de resolver uma inequação do 1º grau é isolarmos a variável envolvida em um dos lados da desigualdade.*

Exemplo 15: Resolva as seguintes inequações:

1. $3x + 1 > 2x - 14$

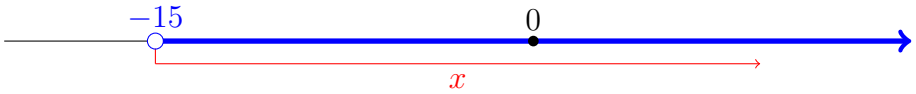
   Somando -1 e $-2x$ de ambos os lados da desigualdade obtemos

   $$3x + 1 - 2x - 1 > 2x - 14 - 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2x > -14 - 1 \quad \Rightarrow \quad x > -15$$

   Portanto, o conjunto solução da inequação dada é

   $$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -15\}$$

   Geometricamente podemos expressar essa solução como



2. $\dfrac{5x}{4} + \dfrac{x}{2} \leq 2x - 1$

Multiplicado ambos os lados da desigualdade por 4 temos:

$$4\left(\frac{5x}{4}\right) + 4\left(\frac{x}{2}\right) \leq 4(2x-1)$$
$$5x + 2x \leq 8x - 4$$
$$5x + 2x - 8x \leq -4$$
$$-x \leq -4$$

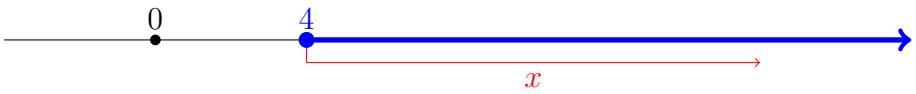
Multiplicado a última desigualdade por -1 obtemos

$$x \geq 4$$

Portanto, o conjunto solução da inequação dada é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$$

Geometricamente podemos expressar essa solução como



3. $\dfrac{3x-2}{2} - 5 < 0$

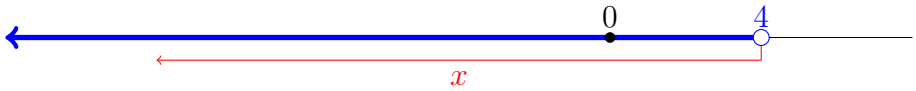
Somando 5 e multiplicado ambos os lados da desigualdade por 2 obtemos:

$$3x - 2 < 10 \quad \Rightarrow \quad 3x < 12 \quad \Rightarrow \quad x < 4$$

Portanto, o conjunto solução da inequação dada é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$$

Geometricamente podemos expressar essa solução como



4. Duas inequações são denominadas *simultâneas* quando elas admitem soluções que as satisfaçam simultaneamente. Em outras palavras, temos uma dupla desigualdade, por exemplo,

$$f(x) < g(x) < h(x)$$

Observe que podemos decompor esta inequação em duas outras, ou seja,

$$\begin{cases} f(x) & < & g(x) \\ & e & \\ g(x) & < & h(x) \end{cases}$$

De outra forma, podemos dizer que:

$$f(x) < g(x) < h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) & < & g(x) \\ & e & \\ g(x) & < & h(x) \end{cases}$$

Para resolver a inequação $f(x) < g(x) < h(x)$, primerio presisamos decompô-la e, em seguida, resolver cada uma das inequações $f(x) < g(x)$ e $g(x) < h(x)$ separadamente.

Se o conjunto solução da inequação $f(x) < g(x)$ é S_1 e o conjunto solução da inequação $g(x) < h(x)$ é S_2, então o conjunto solução da dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ é $S = S_1 \cap S_2$.

Sendo assim resolva a seguinte inequação:

$$3x + 2 < -x + 3 \leq x + 4$$

Para resolver esta inequação precisamos resolver duas inequações, a saber:

(a) $3x + 2 < -x + 3$ (b) $-x + 3 \leq x + 4$

Logo temos que:

(a) $3x + 2 < -x + 3 \quad \Rightarrow \quad 4x < 1 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{4}.$

(b) $-x + 3 \leq x + 4 \quad \Rightarrow \quad -2x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2}.$

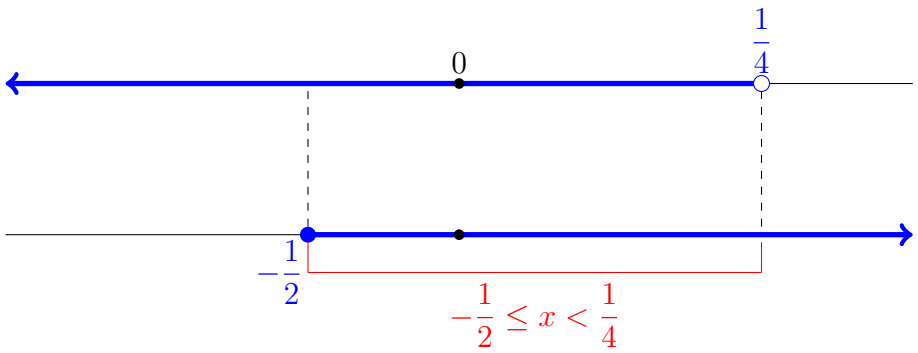
Como x deve ser simultaneamente solução das duas inequações então temos que

$$x < \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad x \geq -\frac{1}{2}, \quad \text{ou melhor,} \quad -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{4}.$$

Portanto, o conjunto solução da dupla inequação é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{4}\}$$

Geometricamente podemos expressar essa solução como



5. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações

$$f x).g(x) > 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

$$f x).g(x) < 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

$$f x).g(x) \geq 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

$$f x).g(x) \leq 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

são denominadas, respectivamente, *inequações produto* e *inequações quociente*. Lembre-se de que no caso quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ o denominador $g(x)$ deve ser diferente de zero.

Para resolver uma inequação produto (quociente) usamos o *quadro de sinais* das funções $f(x)$ e $g(x)$, ou seja, estudamos os sinais de $f(x)$ e $g(x)$ separadamente e, em seguida, usamos a *regra dos sinais do produto (quociente)* de números reais para obter o conjunto solução.

Vejanos por meio de um exemplo:

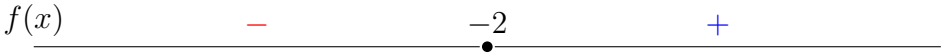
Resolva a inequações produto dada por

$$(x+2)(2x-1) > 0.$$

Para resolver tal inequação, da mesma forma quando for quociente, primeiro fazemos o estudo de sinais das funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 2x - 1$ separadamente.

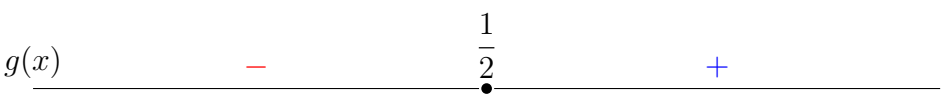
(a) $f(x) = x + 2$: Para fazer o estudo de sinais desta função primeiro encontramos seu zero, ou seja, fazemos

$$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

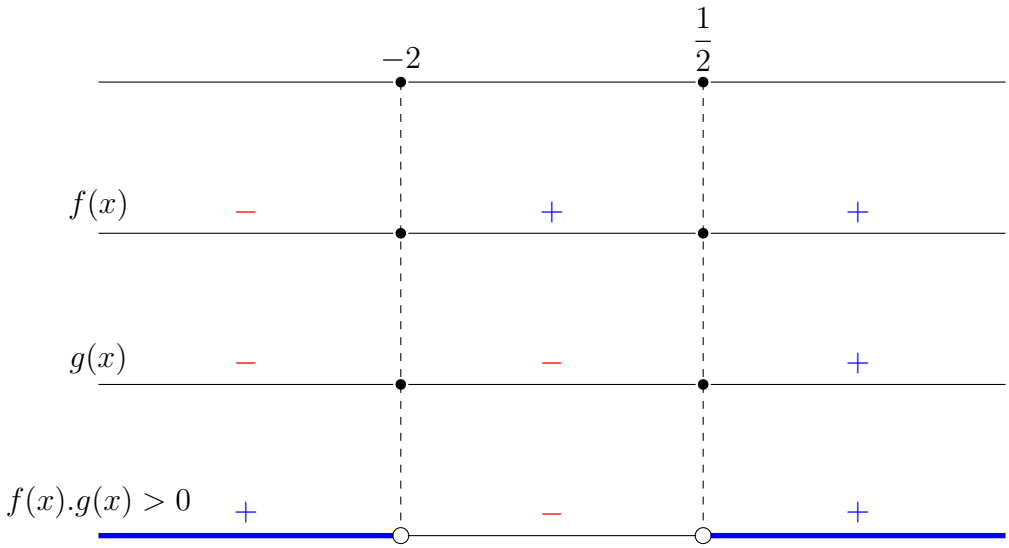


(b) $g(x) = 2x - 1$: Para fazer o estudo de sinais desta função primeiro encontramos seu zero, ou seja, fazemos

$$2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$



Com o objetivo de evitar cálculos algébricos no estudo de sinais do pruduto $f x).g(x)$, também do quaociente, usaremos o quadro a seguir, que denominamos *quadro de sinais do produto (quociente)*, no qual apresentamos os sinais de $f(x)$ e $g(x)$ separadamente e do produto (quociente) $f x).g(x)$.



Portanto, o conjunto solução da inequação $(x+2)(2x-1) > 0$ é dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \quad \text{ou} \quad x > \frac{1}{2}\}$$

6. Podemos estender o raciocínio do exemplo anterior para um produto com mais de dois fatores. Por exemplo, resolva a inequação $(3x-2)(x+1)(3-x) < 0$.

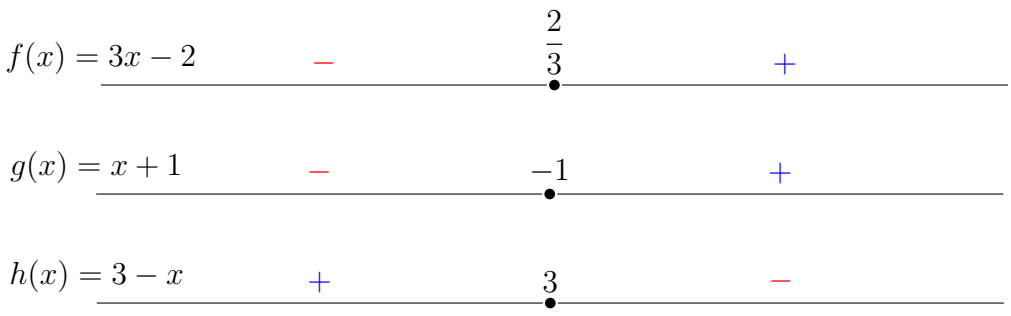
   Os zeros das funções

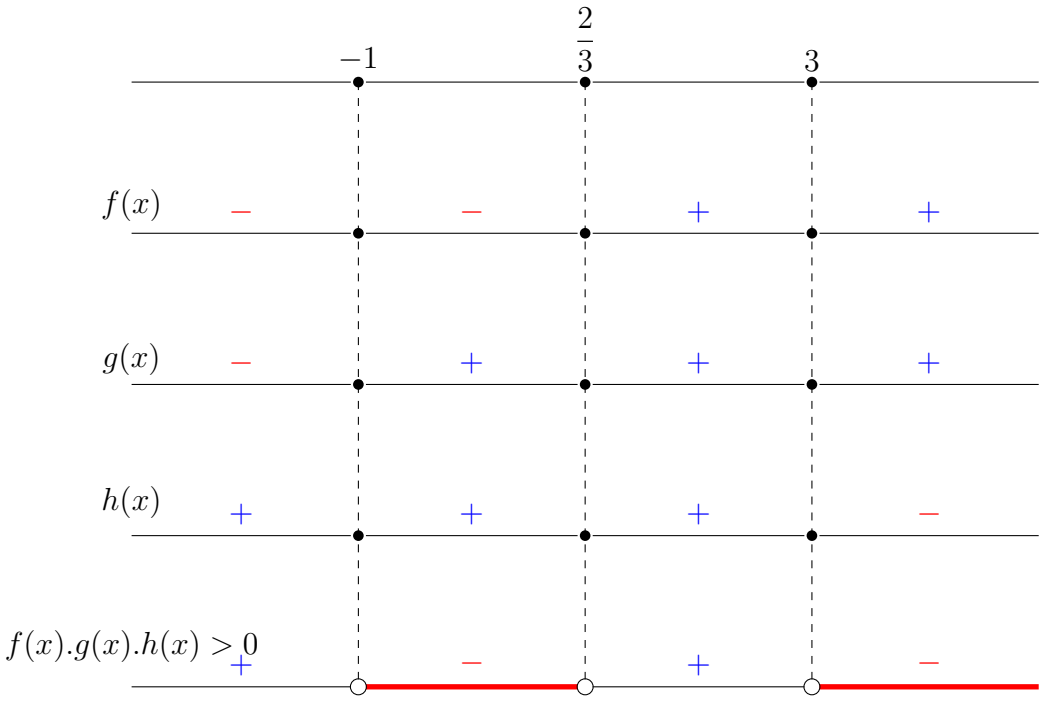
   $$f(x) = 3x - 2 \qquad g(x) = x + 1 \qquad h(x) = 3 - x$$

   são, respectivamente,

   $$x = \frac{2}{3} \qquad x = -1 \qquad x = 3$$

   Analisando os sinais destas funções e do produto obtemos:





Exercícios 3: Resolva as seguintes inequações:

1. $4x + 5 > 2x - 3$
2. $5(x + 3) - 2(x + 1) \leq 2x + 3$
3. $3(x + 1) - 2 \geq 5(x - 1) - 3(2x - 1)$
4. $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-3}{4} \geq 1$
5. $\dfrac{2x-3}{2} - \dfrac{5-3x}{3} < 3x - \dfrac{1}{6}$
6. $(3x + 1)(2x + 1) \leq (2x - 1)(3x + 2) - (4 - 5x)$
7. $6(x + 2) - 2(3x + 2) > 2(3x - 1) - 3(2x + 1)$
8. $-2 < 3x - 1 < 4$
9. $x + 1 \leq 7 - 3x < \dfrac{x}{2} - 1$
10. $-4 < 4 - 2x \leq 3$
11. $-3 < 3x - 2 < x$
12. $3x + 4 < 5 < 6 - 2x$
13. $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$
14. $(3x + 3)(5x - 3) > 0$

15. $(4-2x)(5+2x)<0$

16. $(5x+2)(2-x)(4x+3)>0$

17. $(3x+2)(-3x+4)(x-6)<0$

18. $(6x-1)(2x+7)\geq 0$

19. $(5-2x)(-7x-2)\leq 0$

20. $(3-2x)(4x+1)(5x+3)\geq 0$

21. $(5-3x)(7-2x)(1-4x)\leq 0$

22. $\dfrac{2x+1}{x+2}>0$

23. $\dfrac{3x-2}{3-2x}<0$

24. $\dfrac{3-4x}{5x+1}\geq 0$

25. $\dfrac{-3-2x}{3x+1}\leq 0$

26. $\dfrac{5x-3}{3x-4}>-1$

27. $\dfrac{x-1}{x+1}\geq 3$

28. $\dfrac{1}{x-4}<\dfrac{2}{x+3}$

29. $\dfrac{x+1}{x+2}>\dfrac{x+3}{x+4}$